□17□ □□□□□□□□□□□□

□□□□□

1□□2021·□□□□·□□□□□□□□□□ $f(x)=axe^x-(x+1)^2$ □□□ $a\in\mathrm{R}$ □ e □□□□□□□□□□

□1□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $x>0$ □□ $f(x)>\ln x-x^2-x-3$ □□ a □□□□□□

□□□□

□1□□□□□□□

□2□ $\left(\frac{1}{\mathrm{e}^3},+\infty\right)$

□□□□

□1□□□ $f'(x)=(x+1)(a\mathrm{e}^x-2)$ □□□□□ $a\le 0$ □ $0<a<2\mathrm{e}$ □ $a=2\mathrm{e}$ □ $a>2\mathrm{e}$ □□□□□□ $f'(x)>0$ □ $f'(x)<0$ □□□□□□□

□□□□□□□□□□□

□2□□□□□□□□□□ $ax\mathrm{e}^x-\ln x-x+2>0$ □ $x>0$ □□□□□□ a □□ $a>\frac{\ln x+x-2}{x\mathrm{e}^x}$ □□ $g(x)=\frac{\ln x+x-2}{x\mathrm{e}^x}(x>0)$ □□□□□□

$g(x)$ □□□□□□□□.

□1□

□ $f(x)=ax\mathrm{e}^x-(x+1)^2$ □□

$f'(x)=a(x+1)\mathrm{e}^x-2(x+1)=(x+1)(a\mathrm{e}^x-2)$ □

□ $a\le 0$ □□ $a\mathrm{e}^x-2<0$ □□ $x<-1$ □□ $f'(x)>0$ □□ $x>-1$ □□ $f'(x)<0$ □

□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(-\infty,-1)$ □□□□□□□□ $(-1,+\infty)$

□ $a>0$ □□□ $f'(x)=0$ □□ $x_1=-1$ □ $x_2=\ln\frac{2}{a}$ □

① □ $\ln\frac{2}{a}=-1$ □□ $a=2\mathrm{e}$ □□ $f'(x)\ge 0$ □□□□□ $f(x)$ □ R □□□□□□

② 若$\ln\frac{2}{a}<-1$，即 $a>2e$时，

由 $f'(x)>0$可得：$x<\ln\frac{2}{a}$或$x>-1$；令 $f'(x)<0$可得：$\ln\frac{2}{a}<x<-1$

此时 $f(x)$ 的单调递增区间为$\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)$和$(-1,+\infty)$，单调递减区间为$\left(\ln\frac{2}{a},-1\right)$；

③ 若$\ln\frac{2}{a}>-1$，即 $0<a<2e$时，

由 $f'(x)>0$可得：$x<-1$或$x>\ln\frac{2}{a}$；由 $f'(x)<0$可得：$-1<x<\ln\frac{2}{a}$

此时 $f(x)$ 的单调递增区间为$(-\infty,-1)$ 和$\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$，单调递减区间为$\left(-1,\ln\frac{2}{a}\right)$；

综上所述：

当 $a\le 0$时，$f(x)$ 的单调递增区间为$(-\infty,-1)$，单调递减区间为$(-1,+\infty)$；

当 $a=2e$时，$f(x)$ 在R上单调递增；

当 $a>2e$时，$f(x)$ 的单调递增区间为$\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)$和$(-1,+\infty)$，

单调递减区间为$\left(\ln\frac{2}{a},-1\right)$；

当 $0<a<2e$时，$f(x)$ 的单调递增区间为$(-\infty,-1)$ 和$\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$，

单调递减区间为$\left(-1,\ln\frac{2}{a}\right)$.

（2）

由 $f(x)>\ln x-x^2-x-3$可得 $axe^x-\ln x-x+2>0$对 $x>0$恒成立，

即 $a>\frac{\ln x+x-2}{xe^x}$ 对任意的 $x>0$恒成立，

令 $g(x)=\dfrac{\ln x+x-2}{xe^x}(x>0)$，

则 $g'(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{x}+1\right)xe^x-(x+1)e^x(\ln x+x-2)}{x^2e^{2x}}=\dfrac{(x+1)(3-\ln x-x)}{x^2e^x}$，

令 $h(x)=3-\ln x-x$，则 $h'(x)=-\dfrac{1}{x}-1<0$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $h(1)=2>0$，$h(e)=2-e<0$，故 $h(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的实根，

不妨设该实根为 x_0，

故当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

故 $g(x)_{max}=g(x_0)=\dfrac{\ln x_0+x_0-2}{x_0e^{x_0}}$，

又因为 $3-\ln x_0-x_0=0$，所以 $\ln x_0+x_0=3$，$e^{\ln x_0}=e^{3-x_0}$，$x_0e^{x_0}=e^3$，

所以 $g(x_0)=\dfrac{\ln x_0+x_0-2}{x_0e^{x_0}}=\dfrac{1}{e^3}$，故 a 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{e^3},+\infty\right)$.

2.（2021·陕西安康·高三期中（理））已知函数 $f(x)=a^2e^{x-1}-\ln x-a$，$a>0$.

(1) 若 $a=1$，证明：$f(x)\geq 0$；

(2) 若 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】

(1) 证明见解析

(2) $[1,+\infty)$

【分析】

(1) 由 $a=1$，求出函数导数，利用导数求出函数的最小值即可证明；

□2□□□ $f(x)\ge 0$ □□ $a\ge 1$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□ $e^x\ge x+1$ □□□□□□□□□□□□□□□ 0 □□□□.

□1□

□ $a=1$ □□ $f(x)=e^{x-1}-\ln x-1$ □ $f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$ □ $x>0$ □

□□ $y=f'(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□ $f'(1)=0$ □

□□ $0<x<1$ □□ $f'(x)<0$ □ $x>1$ □□ $f'(x)>0$

∴ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□

∴ $f(x)\ge f(1)=0$.

□2□

∵ $f(x)\ge 0$ □

∴ $f(1)\ge 0$ □

∴ $a\ge 1$ □

$f'(x)=a^2e^{x-1}-\frac{1}{x}$ □ $x>0$ □□□ $y=f'(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□ $f'(1)=a^2-1\ge 0$ □ $f'\left(\frac{1}{1+a^2}\right)=a^2e^{\frac{1}{1+a^2}-1}-a^2-1<0$ □

∴ $\exists x_0\in\left(\frac{1}{1+a^2},1\right]$ □ $f'(x_0)=0$ □ $f(x)$ □ $(0,x_0)$ □□□□□ $(x_0,+\infty)$ □□□□□

∴ $f(x)_{\min}=f(x_0)=a^2e^{x_0-1}-\ln x_0-a$ □□ $a^2e^{x_0-1}=\frac{1}{x_0}$ □

∴ $f(x_0)=\frac{1}{x_0}-\ln x_0-\frac{1}{\sqrt{x_0}e^{\frac{x_0-1}{2}}}$ □

□□ $e^x\ge x+1$ □

∴ $e^{x-1}\ge x$□∴ $e^{\frac{x-1}{2}}\ge\sqrt{x}$□

∴ $\frac{1}{\sqrt{x_0e^{\frac{x_0-1}{2}}}}\le\frac{1}{x_0}$□∴ $\frac{1}{x_0}-\ln x_0-\frac{1}{\sqrt{x_0}e^{\frac{x_0-1}{2}}}\ge 0$

∴.□$a\ge 1$□□$f(x)\ge 0$□

∴□□ a □□□□□$[1,+\infty)$.

3□□2021·□□□□·□□□□□□□□$f(x)=\ln x$□$g(x)=kx^2-2x(k\in R)$.

□1□□$y=f(x)$□$x=1$□□□□□□$y=g(x)$□□□□□k□□□

□2□□$x\in(0,+\infty)$□$f(x)\le g(x)$□□□□□k□□□□□.

□□□□

□1□$\frac{9}{4}$

□2□7

□□□□

□1□□□□□□□□$y=f(x)$□$x=1$□□□□□□□□$y=f(x)$□$x=1$□□□□□□$y=g(x)$□□□□□□□□□□$y=g(x)$□□□□□□□□

□□□□

□2□□$h(x)=g(x)-f(x)=kx^2-2x-\ln x$□□$x\in(0,+\infty)$□$f(x)\le g(x)$□□□□□□□$k\ge\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$□□$x\in(0,+\infty)$□□□□

□□□□□□□.

□1□

□□□□$f(x)=\ln x$□

□□$f'(x)=\frac{1}{x}$□

□$f'(1)=1,\ f(1)=0$□

□□$y=f(x)$□$x=1$□□□□□□□$y=x-1$□

□ $\begin{cases} y=x-1 \\ y=kx^2-2x \end{cases}$ □□ $kx^2-3x+1=0$ □

□□ $y=f(x)$ □ $x=1$ □□□□□ $y=g(x)$ □□□□

□□ $\Delta=9-4k=0$ □□□ $k=\frac{9}{4}$ □

□2□

□ $h(x)=g(x)-f(x)=kx^2-2x-\ln x$ □

□□ $x\in(0,+\infty)$ □ $f(x)\le g(x)$ □□□□

□□ $k\ge\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$ □□ $x\in(0,+\infty)$ □□□□

□ $\varphi(x)=\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$ □

□ $\varphi'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{1-2\ln x-2x}{x^2}$ □

□ $r(x)=1-2\ln x-2x$ □

□ $r'(x)=-\frac{2}{x}-2<0$ □

□□ $r(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□

□ $r(1)=-1<0, r\left(\frac{1}{e}\right)=1+2-\frac{2}{e}>0$ □

□□□□ $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ □□ $r(x_0)=0$ □□ $\varphi'(x_0)=0$ □

□□ $\varphi(x)$ □ $(0,x_0)$ □□□□ $(x_0,+\infty)$ □□□□

□□ $\varphi(x)\le\varphi(x_0)=\frac{2}{x_0}+\frac{\ln x_0}{x_0^2}$ □

□ $1-2\ln x_0-2x_0=0$ □

□□ $\varphi(x_0)=\frac{2}{x_0}+\frac{1-2x_0}{2x_0^2}=\frac{1}{x_0}+\frac{1}{2x_0^2}$ □

□ $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}$ □□ $x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ □□ $y<\frac{1}{2}e^2+e$ □

□□ $\varphi(x)<\frac{1}{2}e^2+e$ □

□□ $k\geq\frac{1}{2}e^2+e\approx 6.3$

□ k □□□□□□□ 7.

4□□2021·□□□□·□□□□□□□□□ $f(x)=e^x-ax$.

□1□□□□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□□□ $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a^2$ □□ $x\geq 0$ □□ $g(x)\geq 0$ □□□□□□□ a □□□□□.

□□□□

□1□□□□□□□

□2□ $-\sqrt{2}\leq a\leq 2-\ln 2$

□□□□

□1□□□ a □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□ $g(x)$ □□□□□□□ $g'(x)_{\min}=g'(0)=1-a$ □□□□□□□□□□ $g(x)_{\min}$ □□ $g(x)_{\min}\geq 0$ □□□□.

□1□

$f(x)=e^x-ax$ □

$f'(x)=e^x-a$.

□ $a\leq 0$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)=e^x-ax$ □ R □□□□□.

□$a>0$□□□ $f'(x)=e^x-a=0$□□ $x=\ln a$.

$x<\ln a$□□ $f'(x)<0$□ $f(x)$□$(-\infty,\ln a)$□□□□□

$x>\ln a$□□ $f'(x)>0$□ $f(x)$□$(\ln a,+\infty)$□□□□□

□□$a\le 0$□□ $f(x)$ □□□□□□□□ R□

□$a>0$□□ $f(x)$ □□□□□□□□$(-\infty,\ln a)$□□□□□□□□$(\ln a,+\infty)$.

□2□

$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a^2=e^x-ax-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a^2$□

$g'(x)=e^x-x-a$□

$g''(x)=e^x-1$□

$\because x\ge 0$□

$\therefore g''(x)=e^x-1\ge 0$□$g'(x)$□$[0,+\infty)$□□□□□

$g'(x)_{\min}=g'(0)=1-a$.

□$1-a\ge 0$□□$a\le 1$□□

$g'(x)_{\min}=1-a\ge 0$□$g(x)$□$[0,+\infty)$□□□□□

□$g(x)_{\min}=g(0)=1-\frac{1}{2}a^2\ge 0$□$-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$□

□$-\sqrt{2}\le a\le 1$.

□$1-a<0$□□$a>1$□□

$g'(x)_{\min}=1-a<0$□

$\exists x_0>0$□$g'(x_0)=e^{x_0}-x_0-a=0$□□$a=e^{x_0}-x_0$□$e^{x_0}=a+x_0$□

$0<x<x_0$□□$g'(x)<0$□$g(x)$□$(0,x_0)$□□□□□

$x>x_0$□□$g'(x)>0$□$g(x)$□$(x_0,+\infty)$□□□□□

□$g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{2}(x_0+a)^2=e^{x_0}-\frac{1}{2}(e^{x_0})^2=\frac{1}{2}e^{x_0}(2-e^{x_0})\ge 0$□

$e^{x_0}\le 2$□

$\therefore 0<x_0\le\ln 2$.

□□□$h(x)=e^x-x$□□$0<x\le\ln 2$□

$h'(x)=e^x-1\ge 0$□$h(x)=e^x-x$□$(0,\ln 2]$□□□□□

$1<h(x)\le 2-\ln 2$□

$\because a=e^{x_0}-x_0$□$0<x\le\ln 2$□□

$\therefore 1<a\le 2-\ln 2$.

□□□□a□□□□□$-\sqrt{2}\le a\le 2-\ln 2$.

5□□2021·□□·□□□□□□$f(x)=e^x-2x+\sin x$□$g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+2\sin x+m$□

□1□□$f(x)$□□□□□

□2□□$x\ge 0$□□$f(x)\ge g(x)$□□□□m□□□□□

□□□□

□1□□$(-\infty,0)$□□□□□$(0,+\infty)$□□□□.

□2□$m\le 1$

□□□□

(1)□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

(2)□□□□□$m\le e^x-\frac{1}{3}x^3-\sin x$□$x\ge 0$□□□□□$u(x)=e^x-\frac{1}{3}x^3-\sin x(x\ge 0)$□□□□□1□□□□□□□□□□□□□□□□

□1□

$f(x)=e^x-2x+\sin x$□$\therefore f'(x)=e^x-2+\cos x$□

①□$x\le 0$□□$e^x-2\in(-2,-1]$, $-1\le\cos x\le 1$□

$\therefore e^x-2+\cos x\le 0$□$x\le 0$□□□□$\therefore f'(x)\le 0$□$\therefore f(x)$□$(-\infty,0)$□□□□□

②□$x>0$□□□$g(x)=e^x-2+\cos x$□□$g'(x)=e^x-\sin x>0$□$x>0$□□□□

$\therefore g(x)$□$(0,+\infty)$□□□□□□$g(0)=0$□$\therefore g(x)>0$□$(0,+\infty)$□□□□

□$f'(x)>0$□$(0,+\infty)$□□□□

$\therefore f(x)$□$(0,+\infty)$□□□□□

□□□□□$f(x)$□$(-\infty,0)$□□□□□□$(0,+\infty)$□□□□.

□2□

□$x\ge 0$□□$e^x-2x+\sin x\ge\frac{1}{3}x^3-2x+2\sin x+m$

$\therefore m\le e^x-\frac{1}{3}x^3-\sin x$□$x\ge 0$□□□□□$u(x)=e^x-\frac{1}{3}x^3-\sin x(x\ge 0)$□

$u'(x)=e^x-x^2-\cos x$□□$v(x)=e^x-x^2-\cos x(x\ge 0)$□

□□1□□$v'(x)=e^x-2x+\sin x\ge v'(0)=1$□$\therefore v(x)$□$(0,+\infty)$□□□□□□$v(0)=0$□

$\therefore u'(x)\ge 0$□$x\ge 0$□□□□$\therefore u(x)$□$[0,+\infty)$□□□□□$u(0)=1$□

$\therefore m\le u(x)_{\min}=u(0)=1$.

6□□2021·□□·□□□□□□□□□$f(x)=ax\cos x-2\sin x$□□□$a\in\mathbf{R}$.

□1□□$a=2$□□□□$f(x)$□$(0,2\pi)$□□□□□□

□2□□□□□ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ □□ $f(x)<3x$ □□□□ a □□□□□.

□□□□

□1□ $f(x)$ □ $(0,\pi)$ □□□□□□□ $(\pi,2\pi)$ □□□□□

□2□ $\{a|a\le 5\}$

□□□□

□1□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□2□□□□□□□□□ $g(x)=3x+2\sin x-ax\cos x$ □ $h(x)=g'(x)$ □□ a □□□□□□□□□□□□□□□□□ a □□□□□.

□1□

□ $a=2$ □□ $f(x)=2x\cos x-2\sin x$ □□ $f'(x)=-2x\sin x$ □□ $f'(x)=0$ □□ $x\in(0,2\pi)$ □□□□ $x=\pi$ □□□ $x\in(0,\pi)$ □□ $f'(x)<0$ □□ $x\in(\pi,2\pi)$ □□ $f'(x)>0$.

□□□ $f(x)$ □ $(0,\pi)$ □□□□□□□ $(\pi,2\pi)$ □□□□□.

□2□

□ $g(x)=3x+2\sin x-ax\cos x$ □□ $g'(x)=3+(2-a)\cos x+ax\sin x$.

□ $a\le 0$ □□ $ax\cos x\le 0$ □□□ $g(x)>g(0)=0$.

□ $0<a\le 5$ □□ $g'(x)\ge 3-3\cos x+ax\sin x>0$ □□ $g(x)$ □ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ □□□□□.

□ $g(0)=0$ □□ $g(x)>g(0)=0$.

□ $a>5$ □□□ $h(x)=g'(x)=3+(2-a)\cos x+ax\sin x$ □□ $h'(x)=(2a-2)\sin x+ax\cos x>0$ □□ $h(x)$ □ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ □□□□□.

$h(0)=5-a<0, h\left(\frac{\pi}{2}\right)=3+\frac{a\pi}{2}>0.$

□□□ $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ □□ $h(x_0)=0$ □□□ $x\in(0,x_0)$ □ $h(x)<0$ □□ $g(x)$ □ $(0,x_0)$ □□□□□□□□□ $x\in(0,x_0)$ □□

$g(x)<g(0)=0$ □□□□□ .

□□□□□ a □□□□□□ $\{a|a\le 5\}$.

7□□2021·□□□□·□□□□□□□□□ $f(x)=2a-\frac{1}{x}-\ln x(a\in Z)$ □

□1□□□□ $f(x)$ □□□□

□2□□ $g(x)=\frac{2+\ln x}{x}$ □□□ $\forall x\in(1,+\infty)$ □□ $f(x)<g(x)$ □□□□ a □□□□□

□□□□

□1□□□□ $f(1)=2a-1$ □□□□□

□2□1

□□□□

□1□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□□□ $2a-\frac{1}{x}-\ln x<\frac{2+\ln x}{x}$ □□ $2a<\frac{3}{x}+\ln x+\frac{\ln x}{x}$ □ $\forall x\in(1,+\infty)$ □□□□□ $F(x)=\frac{3}{x}+\ln x+\frac{\ln x}{x}(x>1)$ □□□□

□ $F(x)$ □□□□□□□□□□□.

□1□

□□□□ $f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

□□ $f'(x)=\frac{1-x}{x^2}$ □□ $f'(x)=0$ □□□ $x=1$ □

□ $f'(x)>0$ □□ $0<x<1$ □□ $f'(x)<0$ □□ $x>1$ □

□□□□ $f(x)$ □ $x\in(0,1)$ □□□□□□□ $x\in(1,+\infty)$ □□□□□□

□□ $f(x)$ □□□□□ $f(1)=2a-1$ □□□□□□

□2□

解：由题意知，$2a-\frac{1}{x}-\ln x<\frac{2+\ln x}{x}$，

即 $2a<\frac{3}{x}+\ln x+\frac{\ln x}{x}$ 对 $\forall x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

令 $F(x)=\frac{3}{x}+\ln x+\frac{\ln x}{x}(x>1)$，

则 $F(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x-\ln x-2}{x^2}$，

令 $h(x)=x-\ln x-2(x>1)$，则 $h(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $h(3)=1-\ln 3<0, h(4)=2-2\ln 2>0$，

所以在 $(3,4)$ 内必存在 x_0，使得 $h(x_0)=0$，

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$h(x)<0, F(x)<0$，所以 $F(x)$ 在 $x\in(1,x_0)$ 上单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0, F(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 $x\in(x_0,+\infty)$ 上单调递增；

所以 $F(x)_{min}=F(x_0)=\frac{3}{x_0}+\ln x_0+\frac{\ln x_0}{x_0}$，

因为 $h(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$，即 $\ln x_0=x_0-2$，

所以 $F(x)_{min}=F(x_0)=\frac{3}{x_0}+x_0-2+\frac{x_0-2}{x_0}=x_0+\frac{1}{x_0}-1, x_0\in(3,4)$，

因为 $F(x_0)$ 在 $x_0\in(3,4)$ 上单调递增，所以 $F(x)_{min}\in\left(\frac{7}{3},\frac{13}{4}\right)$，

又因为 $a\in Z$，所以 $2a\le 2$，所以 $a\le 1$，

所以 a 的最大值为 1.

【点睛】

本题考查了利用导数求函数的单调区间、极值及最值问题，还考查了不等式恒成立问题，考查了学生的数据分析能力和计算能力，难度较大。

8□□2021·□□□□·□□□□□□□□□□□□ $f(x)=e^{x-1}+x\ln x-ax^2$ □

□1□□ $a=1$ □□□□ $y=f(x)$ □□ $(1,f(1))$ □□□□□□□

□2□□ $f(x)\ge 0$ □□□□□□□ a □□□□□□

□□□□

□1□ $y=0$

□2□ $(-\infty,1]$

□□□□

(1)□□□ $f(x)=e^{x-1}+x\ln x-ax^2$ □ $x=1$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□(2)□ $f(x)\ge 0$ □□□□□

$f(1)\ge 0$ □□□□□ $a\le 1$ □□□□ $a\le 1$ □□ $f(x)\ge 0$ □□□.

□1□

□ $a=1$ □□ $f(x)=e^{x-1}+x\ln x-x^2$ □∴ $f(1)=0$ □ $f'(x)=e^{x-1}+\ln x+1-2x$ □

∴ $f'(1)=0$ □

∴□□ $y=f(x)$ □□ $(1,f(1))$ □□□□□□□ $y=0$ □

□2□

∵ $f(x)\ge 0$ □∴ $f(1)\ge 0$ □∴ $a\le 1$ □

□ $a\le 1$ □□ $f(x)\ge e^{x-1}+x\ln x-x^2=x\left(\frac{e^{x-1}}{x}+\ln x-x\right)$ □

□ $g(x)=\frac{e^{x-1}}{x}+\ln x-x$ □ $g'(x)=\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{(x-1)(e^{x-1}-x)}{x^2}$ □

□ $h(x)=e^{x-1}-x$ □ $h'(x)=e^{x-1}-1$ □

□ $x\in(0,1)$ □□ $h'(x)<0$ □ $h(x)$ □□□□□□ $x\in(1,+\infty)$ □□ $h'(x)>0$ □ $h(x)$ □□□□□

∴ $h(x)\ge h(1)=0$□

∴□ $x\in(0,1)$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□□□□ $x\in(1,+\infty)$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □□□□□

∴ $g(x)\ge g(1)=0$ □∴ $f(x)\ge 0$ □□□□□□

∴□□ a □□□□□□ $(-\infty,1]$ □

□□□□

□□

□□□□□.

9□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=\dfrac{3a-\ln x^3}{x}$ □

□1□□□□□ $f(x)$ □ $[1,2]$ □□□□□□

□2□□ $a=-1$ □□□□ $f(x)>-3x-2$ □ $(0,+\infty)$ □□□□.

□□□□

□1□□□□□□□

□2□□□□□□□

□□□□

□1□□□□ $f'(x)=\dfrac{3(\ln x-(a+1))}{x^2}$ □□□□□ 0□□ $x=e^{a+1}$ □□□□□□ e^{a+1} □ $[1,2]$ □□□□□□□□□□

□2□□ $a=-1$ □□ $f(x)>-3x-2\Leftrightarrow 3\ln x+3-3x^2-2x<0$ □□□□□ $h(x)=3\ln x+3-3x^2-2x$ □□□□□ $h(x)_{max}<0$ □□.

□1□

□ $f(x)=\dfrac{3a-\ln x^3}{x}$ □ $f'(x)=\dfrac{-3-3a+\ln x^3}{x^2}=\dfrac{-3-3a+3\ln x}{x^2}=\dfrac{3(\ln x-(a+1))}{x^2}$ □

□ $f'(x)=0$ □ $\ln x=a+1$ □ $x=e^{a+1}$ □

□ $e^{a+1}\ge 2$ □□ $a\ge -1+\ln 2$ □ $f'(x)\le 0$ □ $[1,2]$ □□□□ $f(x)$ □ $[1,2]$ □□□

□ $e^{a+1}\le 1$ □□ $a\le -1$ □ $f'(x)\ge 0$ □ $[1,2]$ □□□□ $f(x)$ □ $[1,2]$ □□□

□ $1<e^{a+1}<2$ □□ $a\in(-1,-1+\ln 2)$ □□ $x\in(1,e^{a+1})$ □ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□ $a\in(e^{a+1},2)$ □ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□

□□□□□□ $a\ge -1+\ln 2$ □ $f(x)$ □ $[1,2]$ □□□□ $a\le -1$ □ $f(x)$ □ $[1,2]$ □□□□ $a\in(-1,-1+\ln 2)$ □□ $x\in(1,e^{a+1})$ □ $f(x)$ □□□□

$a\in(e^{a+1},2)$ □ $f(x)$ □□□

□2□

□ $a=-1$ □□ $f(x)=\frac{-3-3\ln x}{x}$ □ $f(x)>-3x-2$ □ $(0,+\infty)$ □□□□ $\Leftrightarrow -3-3\ln x>-3x^2-2x$ □□ $3\ln x+3-3x^2-2x<0$ □

$x\in(0,+\infty)$ □□□□

□ $h(x)=3\ln x+3-3x^2-2x$ □□ $h'(x)=\frac{3}{x}-6x-2=\frac{-6x^2-2x+3}{x}$ □

□ $h'(x)=0$ □ $x=\frac{-1\pm\sqrt{19}}{6}\approx 0.56$ □

□ $x\in\left(0,\frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right)$ □□ $h'(x)>0$ □ $h(x)$ □□□

□ $x\in\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6},+\infty\right)$ □□ $h'(x)<0$ □ $h(x)$ □□□

□□ $h(x)_{max}=h\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{6}\right)$ □□ $M=\frac{-1+\sqrt{19}}{6}$ □□ $3\ln M<0$ □□ $-6M^2-2M+3=0$ □□ $3-2M=6M^2$ □□

$h(M)=3\ln M+3-3M^2-2M=3(\ln M+M^2)$ □

□□□□ $g(x)=\ln x+x^2$ □

□ $\ln x\le x-1$ □□ $t(x)=\ln x-x+1$ □ $t'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ □□ $x\in(0,1)$ □ $t'(x)>0$ □ $t(x)$ □□□□ $x\in(1,+\infty)$ □ $t'(x)<0$ □

$t(x)$ □□□□ $t(x)\le t(1)=0$ □□□□□

□□ $g(x)=\ln x+x^2\le x^2+x-1$ □ $0.56\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)$ □□ $m(x)=x^2+x-1$ □ $m(x)$ □ $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)$ □□□ $m\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4},m\left(\frac{3}{5}\right)=-\frac{1}{25}$ □□□

$g(M)<m(M)<0$ □

□□ $f(x)>-3x-2$ □ $(0,+\infty)$ □□□□.

10□□2021·□□·□□□□□□□□□ $f(x)$□$\frac{1+\ln(x+1)}{x}$.

□1□□□ $f(x)$□□□(0□+∞)□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□ $x>0$ □□$f(x)>\frac{k}{x+1}$□□□□□□□□ k □□□□□

□□□□

□1□□□□□□□□□□□

□2□3

□□□□

□1□□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□1□

□1□□□ $f(x)=\frac{1+ln(x+1)}{x}$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x^2}[\frac{x}{x+1}-1-ln(x+1)]=-\frac{1}{x^2}[\frac{1}{x+1}+ln(x+1)]$ □

□ $x>0$ □ $x^2>0$ □ $\frac{1}{x+1}>0$ □ $ln(x+1)>0$ □□ $f'(x)<0$ □

□□□□ $f(x)$ □□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□2□

□ $x>0$ □□ $f(x)>\frac{k}{x+1}$ □□□□

□ $h(x)=\frac{(x+1)[1+ln(x+1)]}{x}>k$ □ $x>0$ □□□□

□ $h(x)(x>0)$ □□□□□□ k □

□$h'(x)=\frac{x-1-ln(x+1)}{x^2}$□□$\Phi(x)=x-1-ln(x+1)$□$(x>0)$

□$\Phi'(x)=\frac{x}{x+1}>0$□

$\therefore \Phi(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□Φ□2□$=1-ln3<0$□Φ□3□$=2-2ln2>0$□

$\therefore \Phi(x)=0$ □□□□□□ a □□□□□ $a\in(2,3)$ □ $a=1+ln(a+1)$ □

□$x>a$□□$\Phi(x)>0$□$h'(x)>0$□$0<x<a$□□$\Phi(x)<0$□$h'(x)<0$□□

$h(x)(x>0)$□□□□□h□a□$=\frac{(a+1)[1+ln(a+1)]}{a}=a+1\in(3,4)$□

□□□□□k□□□□□3□

□□□□

□□□□□□□□$\Phi(x)=x-1-ln(x+1)$□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

11□□2021·□□□□·□□□□□□□□□□□$f(x)=\frac{e^x}{x}-ax+a\ln x$□

□1□□$a=1$□□$f(x)$□□□□□

□2□□$f(x)\ge 0$□□a□□□□□□

□□□□

□1□□□□□□1□□□□□□

□2□$(-\infty,e]$.

□□□□

□1□□$a=1$□□□□$f'(x)=\frac{(x-1)(e^x-x)}{x^2}$□□$g(x)=e^x-x$□□$g'(x)>0$□□□$g(x)>0$□□□□□□□$f(x)$□□□□□□□□□□

□□□□□□□□.

□2□□$f(x)\ge 0$□□□$e^{x-\ln x}\ge a(x-\ln x)$□□$t=x-\ln x$□□□$t'=\frac{x-1}{x}$□□□$t_{min}=1$□□$m(t)=\frac{e^t}{t},t\in[1,+\infty)$□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□.

□1□

□□□□□□□□ $f(x)=\frac{e^x}{x}-ax+a\ln x$ □□□□ $(0,+\infty)$ □

□ $a=1$ □□□□ $f(x)=\frac{e^x}{x}-x+\ln x$ □

□□ $f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}-1+\frac{1}{x}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}-\frac{x-1}{x}=\frac{(x-1)(e^x-x)}{x^2}$ □

□ $g(x)=e^x-x, x\in(0,+\infty)$ □□ $g'(x)=e^x-1>0$ □

□□ $g(x)$ □□□□□□□ $g(x)>g(0)>0$ □

□ $f'(x)=0$ □□□ $x=1$ □

□ $x>1$ □□ $f'(x)>0$ □□ $0<x<1$ □□ $f'(x)<0$ □

□□□ $x=1$ □□□□□□□□□□

□□ $f(x)$ □□□□□□ 1 □□□□□□.

□2□

□□□ $f(x)\geq 0$ □□□ $e^{x-\ln x}\geq a(x-\ln x)$ □

□ $t=x-\ln x, x\in(0,+\infty)$ □□ $e^t\geq at$ □□ $t'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ □

□ $t'=0$ □□□ $x=1$ □

□ $x>1$ □□ $t'>0$ □□ $0<x<1$ □□ $t'<0$ □

□□□ $x=1$ □□ $t_{\min}=1$ □□□ $t\in[1,+\infty)$ □

□□ $a\leq\frac{e^t}{t}$ □□ $m(t)=\frac{e^t}{t}, t\in[1,+\infty)$ □□ $m'(t)=\frac{e^t(t-1)}{t^2}\geq 0$ □

□□ $m(t)_{\min}=m(1)=e$ □□□□□ a □□□□□□ $(-\infty,e]$.

12□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=\ln x+2ax$ □ $a\in\mathbf{R}$.

□1□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□□□ $x\in(0,+\infty)$ □□□ $f(x)+1\le xe^{3x}$ □□□□□ a □□□□□.

□□□□

□1□□□□□□

□2□ $a\le\dfrac{3}{2}$

□□□□

□1□□□□□ $f(x)$ □□□□ $f'(x)$ □□ $a\ge 0$ □ $a<0$ □□□□ $f'(x)$ □□□□□□□□

□2□□□□□□□□□ $2a\le e^{3x}-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$ □□□□ $x\in(0,+\infty)$ □□□□□ $g(x)=e^{3x}-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$ □□□□□□□□□□ $g(x)$ □□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□ $g(x)$ □□□□□□□□□□ $g(x)$ □□□□□□□□□ $g(x)$ □□□□.

□1□

□□□ $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2a=\dfrac{2ax+1}{x}(x>0)$

□ $a\ge 0$ □□ $f'(x)>0$ □□□□□□□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ $a<0$ □□□ $f'(x)=0$ □□ $x=-\dfrac{1}{2a}$ □

□ $0<x<-\dfrac{1}{2a}$ □ $f'(x)>0$ □□ $x>-\dfrac{1}{2a}$ □ $f'(x)<0$ □

□□□□ $f(x)$ □ $\left(0,-\dfrac{1}{2a}\right)$ □□□□□□□ $\left(-\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ □□□□□□

□□□□□ $a\ge 0$ □□□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ $a<0$ □□□□ $f(x)$ □ $\left(0,-\dfrac{1}{2a}\right)$ □□□□□□□ $\left(-\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ □□□□□□

□2□

$f(x)+1\le xe^{3x}$ □□ $\ln x+2ax+1\le xe^{3x}$

$\therefore 2a\le e^{3x}-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$ □□□□ $x\in(0,+\infty)$ □□□□

□$g(x)=e^{3x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$

□$g'(x)=3e^{3x}-\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=3e^{3x}+\frac{\ln x}{x^2}=\frac{3x^2e^{3x}+\ln x}{x^2}$

□$h(x)=3x^2e^{3x}+\ln x$□□$h'(x)=6xe^{3x}+9x^2e^{3x}+\frac{1}{x}=3xe^{3x}(2+3x)+\frac{1}{x}>0$

$\therefore h(x)$□$(0,+\infty)$□□□□□

□$h(1)=3e^3+\ln 1=3e^3>0$□$h\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}e+\ln\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(e-3\ln 3)=\frac{1}{3}(\ln e^e-\ln 3^3)<0$□

$\therefore \exists x_0\in\left(\frac{1}{3},1\right)$□□$h(x_0)=0$□

$\therefore g(x)$□$(0,x_0)$□□□□□□□$(x_0,+\infty)$□□□□□□

□$h(x_0)=0$□$3x_0^2e^{3x_0}+\ln x_0=0$

$\therefore 3x_0e^{3x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}=\ln\frac{1}{x_0}e^{\ln\frac{1}{x_0}}$□

□$t(x)=xe^x$□$x\in(0,+\infty)$□$t'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x>0$

□$t(x)=xe^x$□$(0,+\infty)$□□□□□□

$\therefore$□$3x_0e^{3x_0}=\ln\frac{1}{x_0}e^{\ln\frac{1}{x_0}}$□$t(3x_0)=t\left(\ln\frac{1}{x_0}\right)$□

$\therefore 3x_0=\ln\frac{1}{x_0}$□□□$e^{3x_0}=\frac{1}{x_0},\frac{\ln x_0}{x_0}=-3$

$\therefore g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{3x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}=3$□

$\therefore 2a\le 3$

$\therefore a \le \frac{3}{2}$.

【点睛】

关键点点睛:

1.对于利用导数研究函数问题，当一次求导不能解决问题的时候，我们需要进行二次求导来研究函数性质;

2.对于导函数的零点我们无法求出时，我们可以应用零点存在性定理，找到零点所在去区间，然后设出零点，进而可以写出函数的单调性.

13.（2021·江苏·南京师大附中高三期中）设函数 $f(x) = xe^x - a(x+1)^2$，其中 $a \in R$.

（1）讨论函数 $f(x)$的单调区间;

（2）若 $f(x) \ge e\ln x$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】

（1）见解析;

（2）$(-\infty, \frac{e}{4}]$.

【分析】

(1)求导，分类讨论导数的正负即可求得 $f(x)$单调区间;

(2)参变分离，构造新函数，用导数求新函数的最值.

（1）

$f'(x) = e^x + xe^x - 2a(x+1) = (x+1)(e^x - 2a)$

① 当 $a \le 0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$，

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增;

② 当 $a = \frac{1}{2e}$，$f'(x) \ge 0$，$f(x)$在 R 上单调递增;

③ 当 $0 < a < \frac{1}{2e}$时，即当 $x<\ln 2a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增;

当 $\ln 2a<x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减;

当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增;

④ 当 $a>\frac{1}{2e}$ 时，

当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$-1<x<\ln 2a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x>\ln 2a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

综上所述：

① $a\le 0$时，$f(x)$在$(-\infty,-1)$单调递减，在$(-1,+\infty)$单调递增；

② $0<a<\frac{1}{2e}$时，$f(x)$在$(-\infty,\ln 2a)$，$(-1,+\infty)$单调递增，在$(\ln 2a,-1)$单调递减；

③ $a=\frac{1}{2e}$时，$f(x)$在 R 上单调递增；

④ $a>\frac{1}{2e}$时，$f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(\ln 2a,+\infty)$单调递增，在$(-1,\ln 2a)$单调递减．

(2)

$f(x)\ge e\ln x$ 恒成立$\Leftrightarrow a\le \frac{xe^x-e\ln x}{(x+1)^2}=g(x)\ (x>0)$，

$$g'(x)=\frac{\left[e^x(x+1)^2-\frac{e(x+1)}{x}-2xe^x+2e\ln x\right]}{(x+1)},\quad g'(1)=0,$$

令 $h(x)=e^x(x+1)^2-\frac{e(x+1)}{x}-2xe^x+2e\ln x$

$$h'(x)=e^x\left[(x+1)^2+2(x+1)\right]+\frac{e}{x^2}-2e^x(x+1)+\frac{2e}{x}=e^x(x+1)^2+\frac{e(1+2x)}{x^2}>0,$$

$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，即$0<x<1$时，$h(x)<h(1)=0$，$x>1$时，$h(x)>0$

$\therefore g(x)$在$(0,1)$单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增

$\therefore a\le g(1)=\frac{e}{4}$．

□□□□

□□□□□□□□□□□□□(□□)□□

(1)□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

(2)□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

(3)□□□□□□□□□□□□(□□)□□□□□□□□□□□□□

(4)□□□□□□□□□□□□□

(5)□□□(□)□□□□□□

14□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=\ln(x+2)-bx+a, g(x)=e^x-1$ □

□1□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $b=0$ □□□□□ $x\in(-2,+\infty)$ □□ $g(x)\geq\frac{f(x)}{x+2}$ □□□□□□ a □□□□□

□□□□

□1□□ $b\leq 0$ □□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□ $b>0$ □□ $f(x)$ □ $\left(-2,\frac{1}{b}-2\right)$ □□□□□□□ $\left(\frac{1}{b}-2,+\infty\right)$ □□□□□

□2□ -1

□□□□

□1□□□□□□ $f'(x)=\frac{1}{x+2}-b$ □□□ $b\leq 0$ □□ $b>0$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□ $b=0$ □□□ $\forall x\in(-2,+\infty)$ □ $g(x)\geq\frac{f(x)}{x+2}$ □□□□□□ $a\leq(x+2)(e^x-1)-\ln(x+2)$ □ $(-2,+\infty)$ □□□□□□

$F(x)=(x+2)(e^x-1)-\ln(x+2)(x>-2)$ □□□ $a\leq F(x)_{\min}$ □□□□□□□□□□

□1□

$\because$ $f(x)$ □□□□□ $(-2,+\infty)$ □□ $f'(x)=\frac{1}{x+2}-b$ □

□ $b\leq 0$ □□□□ $f'(x)>0$ □ $\therefore$ $f(x)$ □□□□□□□□□□

□ $b>0$ □□□ $f'(x)=0$ □□ $x=\frac{1}{b}-2>-2$ □□□□

x	$\left(-2,\frac{1}{b}-2\right)$	$\frac{1}{b}-2$	$\left(\frac{1}{b}-2,+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	□□□	↘

□ $f(x)$ □ $\left(-2,\frac{1}{b}-2\right)$ □□□□□□□ $\left(\frac{1}{b}-2,+\infty\right)$ □□□□□□

□□□□□□ $b\le 0$ □□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□

□ $b>0$ □□ $f(x)$ □ $\left(-2,\frac{1}{b}-2\right)$ □□□□□□□ $\left(\frac{1}{b}-2,+\infty\right)$ □□□□□□

□2□

□ $b=0$ □□ $f(x)=\ln(x+2)+a$ □

□ $g(x)=e^x-1$ □□ $\forall x\in(-2,+\infty)$ □ $g(x)\ge\frac{f(x)}{x+2}$ □□□

∴ $a\le(x+2)\left(e^x-1\right)-\ln(x+2)$ □ $(-2,+\infty)$ □□□□□

□ $F(x)=(x+2)\left(e^x-1\right)-\ln(x+2)(x>-2)$ □□□ $a\le F(x)_{\min}$ □

∵ $F'(x)=e^x-1+(x+2)e^x-\frac{1}{x+2}=(x+3)\left(e^x-\frac{1}{x+2}\right)$ □

∵ $x>-2$ □∴ $x+3>0$ □□ $h(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$ □□ $h'(x)=e^x+\frac{1}{(x+2)^2}>0$ □

∴ $h(x)$ □ $(-2,+\infty)$ □□□□□□□∵ $h(-1)=\frac{1}{e}-1<0, h(0)=1-\frac{1}{2}>0$ □

∴□□□□□ $x_0\in(-1,0)$ □□□ $h\left(x_0\right)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0+2}=0$ □□ $\left(x_0+2\right)e^{x_0}=1$ □

□□□□□□□□ $x_0+\ln\left(x_0+2\right)=0$ □

x	$\left(-2,x_0\right)$	x_0	$\left(x_0,+\infty\right)$

$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	↘	□□□	↗

□$F(x)_{min}=F(x_0)=(x_0+2)(e^{x_0}-1)-\ln(x_0+2)$

$=(x_0+2)e^{x_0}-[2+x_0+\ln(x_0+2)]=-1$□

$\therefore a\leq -1$□□ *a* □□□□□ - 1□

15□□2021·□□□□□□□□□□ $f(x)=ae^x\ln x$ □□□ $e=2.71828\cdots$ □□□□□□□□ $g(x)=x^2+x\ln a(a>0)$.

□1□□ $a=1$ □□□□□ $f(x)$ □□□□

□2□□□ $h(x)=f(x)-g(x)$ □□ $h(x)<0$ □□□ $x\in(0,1)$ □□□□□□ a □□□□.

□□□□

□1□□□□□□

□2□ $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

□□□□

□1□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□□□□□□□ $\frac{\ln(ae^x)}{ae^x}>\frac{\ln x}{x}$ □□□□□□ $H(x)=\frac{\ln x}{x}$ □□□□□□□□□□□□□□.

□1□

□□ Θ □□□ $f'(x)=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right),x\in(0,+\infty)$.

□ $k(x)=\ln x+\frac{1}{x}$ □□ $k'(x)=\frac{x-1}{x^2}$ □□ $x\in(0,1)$ □□ $k'(x)<0$ □□□ $k(x)$ □□□□□

□ $x\in(1,+\infty)$ □□ $k'(x)>0$ □□□ $k(x)$ □□□□.□□ $k(x)\geq k(1)=1>0$ □

□ $e^x>0$ □□□ $f'(x)>0,f(x)$ □□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□.

□2□

□ $h(x)<0$ □ $f(x)-g(x)<0$ □□ $ae^{x}\ln x<x^{2}+x\ln a$ □□□ $\frac{\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{ae^{x}}=\frac{\ln(ae^{x})}{ae^{x}}$ □

□ $\frac{\ln(ae^{x})}{ae^{x}}>\frac{\ln x}{x}$ □□□ $x\in(0,1)$ □□□□

□ $H(x)=\frac{\ln x}{x}$ □□ $H'(x)=\frac{1-\ln x}{x^{2}}$ □□□□ $x\in(0,1)$ □□ $H'(x)>0$ □□□ $H(x)$ □□□□□

□□ $x\in(1,+\infty)$ □□ $H(x)>0$ □□ $x\in(0,1)$ □□ $H(x)<0$ □

□ $ae^{x}..1>x$ □□ $H(ae^{x})..0>H(x)$ □□ $0<ae^{x}<1$ □□□ $H(ae^{x})>H(x)$ □

□ $H(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□□□ $ae^{x}>x$ □

□□□□□ $ae^{x}>x$ □□□ $x\in(0,1)$ □□□□□ $a>\frac{x}{e^{x}}$ □□□ $x\in(0,1)$ □□□.

□ $G(x)=\frac{x}{e^{x}},x\in(0,1)$ □□ $G'(x)=\frac{1-x}{e^{x}}>0$ □

□□ $G(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□□ $G(x)<G(1)=\frac{1}{e}$,, a □

□ a □□□□□□ $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

16□□2021·□□□□·□□□□□□□□□□□ $f(x)=ax-(a+1)\ln x-\frac{1}{x}$.

□1□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $a=0$ □□ $f(x)\geq mxe^{x}-\frac{1}{x}+x+1$ □□□□□ m □□□□□.

□□□□

□1□□□□□□□□□□□□

□2□ $(-\infty,-1]$

□□□□

□1□□□ $f'(x)=\frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$ □□□ a □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□

□2□□ $t=xe^x>0$ □□□ $m\le-\frac{\ln t+1}{t}$ □□□□□ $g(t)=-\frac{\ln t+1}{t}$ □□□□□□□□□ $g(t)$ □□□□□□□□□□□□□ m □□□□□.

□1□

□□□□ $f(x)=ax-(a+1)\ln x-\frac{1}{x}$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

$f'(x)=a-\frac{a+1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$.

①□ $a\le0$ □□□ $f'(x)<0$ □□ $x>1$ □□ $f'(x)>0$ □□ $0<x<1$.

□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(0,1)$ □□□□□□□□ $(1,+\infty)$ □

②□ $0<a<1$ □□ $\frac{1}{a}>1$ □□ $f'(x)<0$ □□ $1<x<\frac{1}{a}$ □□ $f'(x)>0$ □□ $0<x<1$ □ $x>\frac{1}{a}$ □

□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(0,1)$ □ $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ □□□□□□□□ $\left(1,\frac{1}{a}\right)$ □

③□ $a=1$ □□□□□□ $x>0$ □ $f'(x)\ge0$ □ $f'(x)$ □□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□

④□ $a>1$ □□ $0<\frac{1}{a}<1$ □□ $f'(x)<0$ □□ $\frac{1}{a}<x<1$ □□ $f'(x)>0$ □□ $0<x<\frac{1}{a}$ □ $x>1$ □

□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□□□ $\left(\frac{1}{a},1\right)$.

□□□□□□ $a\le0$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(0,1)$ □□□□□□□□ $(1,+\infty)$ □

□ $0<a<1$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(0,1)$ □ $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ □□□□□□□□ $\left(1,\frac{1}{a}\right)$ □

□ $a=1$ □□□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□

□$a>1$□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□$\left(0,\frac{1}{a}\right)$□$(1,+\infty)$□□□□□□□□$\left(\frac{1}{a},1\right)$.

□2□

□□□$a=0$□□ $f(x)=-\ln x-\frac{1}{x}$□

□ $f(x)\geq mxe^{x}-\frac{1}{x}+x+1$□□$mxe^{x}\leq-\ln x-x-1=-\ln(xe^{x})-1$□

∵ $x>0$□□$t=xe^{x}$□□$t'=(x+1)e^{x}>0$□□□□$t=xe^{x}$□$(0,+\infty)$□□□□□□

□$x>0$□□□$t=xe^{x}>0$□□□□$mt\leq-\ln t-1$□□□$m\leq-\frac{\ln t+1}{t}$□

□$g(t)=-\frac{\ln t+1}{t}$□□□$t>0$□□$g'(t)=\frac{\ln t}{t^{2}}$.

□$0<t<1$□□$g'(t)<0$□□□□□$g(t)$□□□□□

□$t>1$□□$g'(t)>0$□□□□□$g(t)$□□□□□□□□$g(t)_{\min}=g(1)=-1$□$\therefore m\leq-1$.

□□□□□□□m□□□□□□$(-\infty,-1]$.

□□□□

□□

□1□$\forall x\in D$□$m\leq f(x)\Leftrightarrow m\leq f(x)_{\min}$□

□2□$\forall x\in D$□$m\geq f(x)\Leftrightarrow m\geq f(x)_{\max}$□

□3□$\exists x\in D$□$m\leq f(x)\Leftrightarrow m\leq f(x)_{\max}$□

□4□$\exists x\in D$□$m\geq f(x)\Leftrightarrow m\geq f(x)_{\min}$.

17□□2021·□□□□·□□□□□□□□□□□□$f(x)=\frac{e^{x}}{x}-ax+a\ln x$□

□1□□$a=e$□□$f(x)$□□□□□

□2□□ $f(x)\ge 0$ □□ a □□□□□

□□□□

□1□□□□□□1□□□□□□

□2□$(-\infty,e]$

□□□□

□1□□□□□□□□□ $f'(x)=\dfrac{(x-1)(e^x-ex)}{x^2}$ □□□ $e^x-ex\ge 0$ □□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□ $t=x-\ln x, x\in(0,+\infty)$ □□□ t □□□□□□□□□□ $a\le\dfrac{e^t}{t}$ □□ $m(t)=\dfrac{e^t}{t}$ □□□□□ $m(t)$ □□□□□□□□□□.

□1□

□□□1□ $f(x)$ □□□□ $(0,+\infty)$ □

$$f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}-e+\frac{e}{x}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}-\frac{e(x-1)}{x}=\frac{(x-1)(e^x-ex)}{x^2}$$□

□ $g(x)=e^x-ex, x\in(0,+\infty)$ □□ $g(x)=e^x-e$ □

□ $0<x<1$ □□ $g'(x)<0$ □□ $x>1$ □□ $g'(x)>0$ □

□□□□ $g(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□

□□ $g(x)\ge g(1)=0$ □□ $e^x-ex\ge 0$ □

□ $0<x<1$ □□ $f'(x)<0$ □□ $x>1$ □□ $f'(x)>0$ □

□□□□ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□

$\therefore f(x)$ □□□□□□1□□□□□□□

□2□

□ $f(x)\ge 0$ □ $e^{x-\ln x}\ge a(x-\ln x)$ □

□ $t=x-\ln x, x\in(0,+\infty)$ □□ $e^t\ge at$ □

$t=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$t<0$，当 $x>1$ 时，$t>0$，

所以函数 $t=x-\ln x, x\in(0,+\infty)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

所以当 $x=1$ 时，$t_{\min}=1$，$\therefore t\in[1,+\infty)$，

$\therefore a\le\frac{e^t}{t}$，

令 $m(t)=\frac{e^t}{t}, t\in[1,+\infty)$，则 $m'(t)=\frac{e^t(t-1)}{t^2}\ge 0$，

所以函数 $m(t)=\frac{e^t}{t}$ 在 $t\in[1,+\infty)$ 上递增，所以 $m(t)_{\min}=m(1)=e$，

所以 $a\le e$，

所以 a 的取值范围为 $(-\infty,e]$。

18．（2021·陕西西安·高三期中（文））已知函数 $f(x)=2ax+\ln(2-x)(a\in\mathbf{R})$．

（1）求 $f(x)$ 的极值；

（2）若 $f(x)\le 4a$ 恒成立，求 a 的取值范围．

【答案】

（1）答案见解析；

（2）$\left[\frac{1}{2e},+\infty\right)$．

【分析】

（1）先求导，再利用导数对 a 分两种情况讨论得解；

（2）等价于 $a\ge\frac{\ln(2-x)}{2(2-x)}(x<2)$ 恒成立，设 $g(x)=\frac{\ln(2-x)}{2(2-x)}(x<2)$，求出 $g(x)_{\max}$ 即可．

（1）

解：由题得 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,2)$．

$f'(x)=2a-\frac{1}{2-x}(x<2,a\in R)$．

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递减，$f(x)$ 无极值。

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=2-\frac{1}{2a}\left(2-\frac{1}{2a}<2\right)$，

当 $x<2-\frac{1}{2a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,2-\frac{1}{2a}\right)$ 上单调递增。

当 $2-\frac{1}{2a}<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\left(2-\frac{1}{2a},2\right)$ 上单调递减。$f(x)$ 在 $x=2-\frac{1}{2a}$ 处取得极大值，$f(x)$ 无极小值。

$$f(x)_{极大值}=f\left(2-\frac{1}{2a}\right)=4a-1-\ln 2a(a>0)$$.

综上所述，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 无极值；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 有极大值，极大值为 $4a-1-\ln 2a$，无极小值。

（2）

解：若 $f(x)\le 4a$ 恒成立，即 $2ax+\ln(2-x)\le 4a$ 恒成立，

就是 $a\ge\frac{\ln(2-x)}{2(2-x)}(x<2)$ 恒成立。

设 $g(x)=\frac{\ln(2-x)}{2(2-x)}(x<2)$. 则 $g'(x)=\frac{-1+\ln(2-x)}{2(2-x)^2}(x<2)$.

令 $g'(x)=0(x<2)$，得，$x=2-e$.

当 $x\in(-\infty,2-e)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,2-e)$ 上单调递增；当 $x\in(2-e,2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(2-e,2)$ 上单调递减。

$\therefore g(x)_{max}=g(x)_{极大值}=g(2-e)=\frac{1}{2e}$.

$\therefore a$ 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2e},+\infty\right)$.

19．（2021·天津市第一零二中学高三期中）已知函数 $f(x)=(x-k-1)e^x$（其中 e 为自然对数的底数）.

（1）当 $k=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值；

□2□□□□ $g(x)=f(x)+e^2$ □ $x\in(0,+\infty)$ □□□□□□□□□ k □□□□□□

□3□□□□□ $f(x)>3x$ □□□□ $x\in\mathbf{R}$ □□□□□□□ k □□□□□

□□□□

□1□□□□□ $-\frac{1}{e}$ □□□□□□

□2□ $2\ \cup\left[e^2-1,+\infty\right)$ □

□3□ -2.

□□□□

□1□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□□□□□□ $g(x)$ □□□□□□ $k\le 0$ □□□□ $g(0)<0$ □□□□□□□□□□□□□□□□ $k>0$ □□□□ $g(x)_{\min}=g(k)$ □□□□

$g(k)>0$ □ $g(k)=0$ □ $g(k)<0$ □□□□□□□□ $g(x)$ □ $x\in(0,+\infty)$ □□□□□□□□□□□□□□□□

□3□□□□□□□□□□ $k<x-1-\frac{3x}{e^x}$ □□ $h(x)=x-1-\frac{3x}{e^x}$ □ $h'(x)=\frac{e^x+3x-3}{e^x}$ □□ $m(x)=e^x+3x-3$ □□□ $\exists x_0\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ □□

□ $m(x_0)=0$ □□□□□ $h(x)_{\min}=h(x_0)$ □□□□□ $h(x_0)$ □□□□□□□□ k.

□1□

□ $k=-1$ □□ $f(x)=xe^x$ □□ $f'(x)=(x+1)e^x$ □

$\therefore$ □ $x\in(-\infty,-1)$ □□ $f'(x)<0$ □□ $x\in(-1,+\infty)$ □□ $f'(x)>0$ □

$\therefore f(x)$ □ $(-\infty,-1)$ □□□□□□□ $(-1,+\infty)$ □□□□□□

$\therefore f(x)$ □□□□□ $f(-1)=-\frac{1}{e}$ □□□□□.

□2□

$g(x)=(x-k-1)e^x+e^2$ □ $\therefore g'(x)=(x-k)e^x$ □

∴当 $x\in(-\infty,k)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(k,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$；

∴$g(x)$ 在 $(-\infty,k)$ 上单调递减，在 $(k,+\infty)$ 上单调递增；

① 当 $k\le 0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，若 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点，则 $g(0)<0$，

即 $-k-1+e^2<0$，解得：$k>e^2-1>0$（舍）；

② 当 $k>0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,k)$ 上单调递减，在 $(k,+\infty)$ 上单调递增；

当 $g(k)>0$，即 $0<k<2$ 时，$g(x)_{\min}=g(k)>0$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点，不合题意；

当 $g(k)=0$，即 $k=2$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点 $x=2$，满足题意；

当 $g(k)<0$，即 $k>2$ 时，由 $g(k+1)=e^2>0$ 得：$g(k)g(k+1)<0$，

∴$g(x)$ 在 $(k,k+1)$ 上有唯一零点，此时需 $g(0)=-k-1+e^2\le 0$，即 $k\ge e^2-1$；

综上所述：当 $k=2$ 或 $k\ge e^2-1$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点，

即实数 k 的取值范围为 $\{2\}\cup[e^2-1,+\infty)$.

（3）

若 $f(x)>3x$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，即 $(x-k-1)e^x>3x$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 $k<x-1-\frac{3x}{e^x}$，

令 $h(x)=x-1-\frac{3x}{e^x}$，则 $h'(x)=1-\frac{3-3x}{e^x}=\frac{e^x+3x-3}{e^x}$，

令 $m(x)=e^x+3x-3$，则 $m'(x)=e^x+3>0$，$\therefore m(x)$ 在 R 上单调递增，

$m\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-\frac{3}{2}>0$，$m\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt[4]{e}-\frac{9}{4}<0$，$\therefore \exists x_0\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，使得 $m(x_0)=0$，

即 $e^{x_0}+3x_0-3=0$，

则当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$；

$\therefore h(x)$□$(-\infty, x_0)$□□□□□□□$(x_0, +\infty)$□□□□□□

$\therefore h(x)_{\min} = h(x_0) = x_0 - 1 - \dfrac{3x_0}{e^{x_0}} = x_0 - 1 - \dfrac{3x_0}{3-3x_0} = x_0 - 1 + \dfrac{x_0}{x_0 - 1} = x_0 - 1 + \dfrac{1}{x_0 - 1} + 1$□

□ $x_0 \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$□$\therefore x_0 - 1 \in \left(-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{2}\right)$□$\therefore h(x_0) \in \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{13}{12}\right)$□

□ $k < h(x_0)$□$\therefore$□□k□□□□□-2.

□□□□

□□$a \geq f(x)$□□□□□

$a \geq f(x)_{\max}$□□$a \leq f(x)$□□□□□$a \leq f(x)_{\min}$.

20□□2021·□□·□□□□□□□$f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x} - ax + a\ln x$□□□$a \in R$.

□1□□$a = \dfrac{1}{e}$□□□$f(x)$□□□□□□

□2□□$x > 0$□□$f(x) \geq 0$□□a□□□□□.

□□□□

□1□□□□□□□□$(1, +\infty)$□□□□□□□□$(0, 1)$.

□2□$(-\infty, 1]$

□□□□

□1□□$a = \dfrac{1}{e}$□□□□$f'(x) = \dfrac{(x-1)(e^x - x)}{ex^2}$□□$g(x) = e^x - x, x > 0$□□□$g'(x) > 0$□□□□□$f'(x)$□□□□□□□□□

□2□□$f(x) \geq 0$□□□$e^{x - \ln x - 1} \geq a(x - \ln x)$□□□□□$t(x) = x - \ln x, x > 0$□□□□□□□□□$t(x)$□□□□□□□□□□□$\dfrac{e^{t-1}}{t} \geq a$□□□□

□□ $\frac{e^{t-1}}{t}\geq 1$ □□□□□.

□1□

□□□ $a=\frac{1}{e}$ □□ $f(x)=\frac{1}{e}(\frac{e^x}{x}-x+\ln x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □

□□ $f'(x)=\frac{1}{e}(\frac{xe^x-e^x}{x^2}-1+\frac{1}{x})=\frac{xe^x-e^x-x^2+x}{ex^2}=\frac{(x-1)(e^x-x)}{ex^2}$ □

□ $g(x)=e^x-x, x>0$ □□□ $g'(x)=e^x-1>0$ □□ $g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□ $g(x)>g(0)=1>0$ □

□ $f'(x)>0$ □□□ $x>1$ □□ $f'(x)<0$ □□□ $0<x<1$ □

□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□□□ $(0,1)$.

□2□

□□□□□□ $f(x)\geq 0$ □□□ $e^{x-\ln x-1}\geq a(x-\ln x)$ □□□□

□ $t(x)=x-\ln x, x>0$ □□□ $t'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ □

□ $t'(x)>0$ □□□ $x>1$ □□ $t'(x)<0$ □□□ $0<x<1$ □

□□ $t(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□□□ $t(x)\geq t(1)=1$ □

□□□□ $e^{t-1}\geq at$ □□□□□ $\frac{e^{t-1}}{t}\geq a$ □□□□

□□1□□□□□ $x>0$ □□ $g(x)=e^x-x>1$ □□□ $e^x>x+1$ □□ $\frac{e^x}{x+1}>1$ □

□ $t-1$ □□□□□□ x □□□ $\frac{e^{t-1}}{t}>1$ □

□□ $t=1$ □□ $\frac{e^{t-1}}{t}=1$ □□□ $\frac{e^{t-1}}{t}\ge 1$ □□□□

□□□ $\frac{e^{t-1}}{t}\ge a$ □□□□□ $a\le 1$ □□□□ a □□□□□ $(-\infty,1]$.

21□□2021·□□□□·□□□□□□□□ $f(x)=-2x^2+\frac{1+\ln x}{x}, g(x)=e^{2x}-2x^2-a$□

□1□□□□ $f(x)$ □ $(1,f(1))$ □□□□□□□

□2□□□□□ $g(x)\ge f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□ a □□□.

□□□□

□1□ $y=-4x+3$

□2□ $a\le 2$

□□□□

□1□□□ $f'(x)=-4x+\frac{1-1-\ln x}{x^2}=-4x+\frac{-\ln x}{x^2}$ □□□□□ $f'(1)$ □ $f(1)$ □□□□□□□□□2□□□□□ $g(x)\ge f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□

□□□ $e^{2x}-\frac{1+\ln x}{x}\ge a$ □□□□□ $h(x)=e^{2x}-\frac{1+\ln x}{x}$ □ $x\in(0,+\infty)$ □□□□□□□□□.

□1□

□: $f(x)=-2x^2+\frac{1+\ln x}{x}$ □

$f'(x)=-4x+\frac{1-1-\ln x}{x^2}=-4x+\frac{-\ln x}{x^2}$ □

$f'(1)=-4x+\frac{1-1-\ln x}{x^2}=-4$ □

$f(1)=-1$ □

$\therefore$ □□□□□ $y=-4x+3$.

□2□

□□□ $g(x)\ge f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□

□ $e^{2x}-\frac{1+\ln x}{x}\ge a$ □□□□

□ $h(x)=e^{2x}-\frac{1+\ln x}{x}$ □ $x\in(0,+\infty)$ □

$h'(x)=2e^{2x}+\frac{\ln x}{x^2}=\frac{2x^2e^{2x}+\ln x}{x^2}$ □

□ $\varphi(x)=2x^2e^{2x}+\ln x, \varphi'(x)=4x(1+x)e^{2x}+\frac{1}{x}>0, x\in(0,+\infty)$ □

$\therefore \varphi(x)$ □□□ $(0,+\infty)$ □□□□□□ $\varphi(e^{2})=\frac{2e^{2e^{1}}}{e^{4}}-2<0, \varphi(1)=2e^{2}>0$ □

$\therefore \exists x_0\in(e^{2},1)$ □□□ $\varphi(x_0)=2x_0^2e^{2x_0}+\ln x_0=0$ □

□ $x\in(0,x_0), h'(x)<0, h(x)$ □□□□□

$x\in(x_0,+\infty), h'(x)>0, h(x)$ □□□□□

□□□ $h(x)_{\min}=h(x_0)=e^{2x_0}-\frac{1+\ln x_0}{x_0}$ □

□□□ $\varphi(x_0)=2x_0^2e^{2x_0}+\ln x_0=0$ □

$2x_0e^{2x_0}+\frac{\ln x_0}{x_0}=0$ □ $2x_0e^{2x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}=\ln\frac{1}{x_0}e^{\ln\frac{1}{x_0}}$.

□□□ $y=xe^{x}$ □ $(0,+\infty)$ □□□□

□□□ $2x_0=\ln\frac{1}{x_0}$ □ $\therefore e^{2x_0}=\frac{1}{x_0}$ □

$\therefore h(x)_{\min} = h(x_0) = 2$,

$\therefore a \le 2$

22.（2021·江苏·海门中学高三期中）已知函数 $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + x$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间;

（2）若对 $\forall x > 0$，$f(x) \ge ax^2 + 1$ 成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】

（1）$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$，无递减区间;

（2）a 的取值范围为 $\left(-\infty, \dfrac{e^3 + 5}{27}\right]$.

【分析】

（1）、先求出 $f'(x)$，然后利用二次求导法判断 $f'(x)$ 的正负，从而得到 $f(x)$ 的单调区间;

（2）、利用分离参数法可知 $a \le h(x)$，由题意可知 $a \le h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，求出 $h(x)_{\min}$，即可得到实数 a 的取值范围;

（1）

$\because f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + x$，$\therefore f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} + 1 = \dfrac{e^x(x-1) + x^2 + 1}{x^2}$，

令 $g(x) = e^x(x-1) + x^2 + 1$，则 $g'(x) = xe^x + 2x = x(e^x + 2)$，

当 $x < 0$ 时，$g'(x) < 0$，$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减；当 $x > 0$ 时，$g'(x) > 0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

$\therefore g(x) \ge g(0) = 0$，$\therefore f'(x) = \dfrac{e^x(x-1) + x^2 + 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2} \ge 0$，

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$，$(0, +\infty)$，无递减区间;

（2）

$\because$ $\forall x > 0$ 时，$f(x) \ge ax^2 + 1$ 成立，且 $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + x$，$\therefore \forall x > 0$ 时，$\dfrac{e^x - 1}{x} + x \ge ax^2 + 1$ 成立，

$\therefore ax^2 \le \dfrac{e^x+x^2-x-1}{x}$ □ $(0$□$+\infty)$ □□□□□ $\therefore a \le \dfrac{e^x+x^2-x-1}{x^3}$ □ $(0$□$+\infty)$ □□□□□

□ $h(x)=\dfrac{e^x+x^2-x-1}{x^3}$ □

$\therefore h'(x)=\dfrac{(e^x+2x-1)x^3-3x^2(e^x+x^2-x-1)}{x^6}=\dfrac{(e^x+2x-1)x-3(e^x+x^2-x-1)}{x^4}=\dfrac{(x-3)(e^x-x-1)}{x^4}$ □

□ $e^x-x-1>0$ □□ $h'(x)=0$ □□ $x=3$ □

□ $x>3$ □□ $h'(x)>0$ □ $\therefore h(x)=\dfrac{e^x+x^2-x-1}{x^3}$ □ $(3$□$+\infty)$ □□□□□□

□ $0<x\le 3$ □□ $h'(x)<0$ □ $\therefore h(x)=\dfrac{e^x+x^2-x-1}{x^3}$ □ $(0,3)$ □□□□□□

□ $x=3$ □□ $h(x)$ □ $h(x)_{\min}=h(3)=\dfrac{e^3+5}{27}$ □ $\therefore a$ □□□□□□ $\left(-\infty\right.$□$\left.\dfrac{e^3+5}{27}\right]$.

23□□2021·□□□□□□□□□□□□□□□□□ $y=h(x)^{k(x)}$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

$\ln y=\ln h(x)^{k(x)}=k(x)\ln h(x)$ □□□□ x □□□□□ $\dfrac{y'}{y}=k'(x)\ln h(x)+k(x)\dfrac{h'(x)}{h(x)}$ □□□

$y'=h(x)^{k(x)}\left[k'(x)\ln h(x)+k(x)\dfrac{h'(x)}{h(x)}\right]$.□□ $f(x)=x^x(x\in(0,+\infty))$ □ $g(x)=\dfrac{a}{2}x^2+\dfrac{1}{2}(a\in R)$.

□1□□□□ $y=f(x)$ □ $x=1$ □□□□□□□

□2□□ $\forall x\in(0,+\infty)$ □ $f(x)\ge g(x)$ □□□□□ a □□□□□.

□□□□

□1□ $y=x$

□2□ $(-\infty,1]$

□□□□

□1□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□□□□ $f(1)\ge g(1)$ □□□□□□ $a\le 1$ □□□□□ $a\le 1$ □□□□□□□□□□□□ $F(x)=f(x)-g(x)$ □□□□□□ $F'(x)$ □□□

$M(x)=F'(x)$ □□□□□□□ $F'(x)$ □□□□□□□ $F(x)$ □□□□□

□1□

□ $y=f(x)=x^x$ □□□□ $h(x)=x$ □ $k(x)=x$

□□□□□□□□□□ $f'(x)=x^x(\ln x+1)$ □

□□ $f'(1)=1$ □□ $f(1)=1$ □

□□□□□ $y=f(x)$ □ $x=1$ □□□□□□□ $y=x$

□2□

□□□□□□□□□ $\forall x\in(0,+\infty),\ f(x)\ge g(x)$ □□□□□ $f(1)\ge g(1)$ □□□ $a\le 1$

□□□□□□□ $a\le 1$ □□□ $\forall x\in(0,+\infty),\ f(x)\ge g(x)$ □□□□

□□ $F(x)=f(x)-g(x)$ □ $x\in(0,+\infty)$ □

□ $F'(x)=f'(x)-g'(x)=x^x(\ln x+1)-ax$ □

□ $M(x)=F'(x)=x^x(\ln x+1)-ax,\ x\in(0,+\infty)$ □

□□ $M'(x)=x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}-a=e^{x\ln x}(\ln x+1)^2+e^{(x-1)\ln x}-a$ □

□□ $x-1$ □ $\ln x$ □□□□□ $(x-1)\ln x\geqslant 0$ □□□ $e^{(x-1)\ln x}\ge 1\ge a$ □

□ $e^{x\ln x}(\ln x+1)^2\ge 0$ □□□ $M'(x)\geqslant 0$ □□□ $M(x)$ □ $F'(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□□□ $F'(1)=0$ □□□□□ $x\in(0,1)$ □□ $F'(x)<F'(1)=0$ □ □ $x\in(1,+\infty)$ □□ $F'(x)>F'(1)=0$.

所以，$F(x)$ 为 $(0,1)$ 上减函数，为 $(1,+\infty)$ 上增函数，

所以，$F(x)_{\min}=F(1)=0$，无最大值．

所以 $F(x)=f(x)-g(x)\ge F(1)=0$，

$\therefore \forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)\ge g(x)$ 恒成立．

综上，a 的范围是 $(-\infty,1]$．

【点睛】

本题考查导数的几何意义，考查学生的阅读理解能力，创新能力，应用新知识的能力，对不等式恒成立求参数问题采取的特殊方法：先由特殊值找到必要条件，然后再证明其也是充分的，目的是解题中方便确定正负．目标明确．难点一是理解并应用新知识的能力，二是需要二次求导，本题属于难题．

24．（2021·四川成都·高三期中（文））已知函数 $f(x)=e^x-1-ax(a\in R)$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $g(x)=\ln(e^x-1)-\ln x$，且 $f[g(x)]<f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围．

【答案】

（1）当 $a\le0$ 时，$f(x)$ 在 R 单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增．

（2）$(-\infty,1]$．

【分析】

（1）利用导数，通过分 $a\le0$ 和 $a>0$ 两种情况，即可求出函数的单调区间；

（2）首先利用（1）的结论及导数证明 $0<g(x)<x$；然后分 $a\le0$ 和 $a>0$ 两种情况，将不等式大小之间的关系转化为自变量的比较，从而可得出答案．

（1）

因为 $f(x)=e^x-1-ax(a\in R)$，所以 $f'(x)=e^x-a$，

① 若 $a\le0$，$f'(x)=e^x-a>0$，所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增；

② 若 $a>0$，由 $f'(x)>0$，得 $x>\ln a$，所以函数 $f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

□ $f'(x)<0$ □□ $x<\ln a$ □□□□□ $f(x)$ □ $(-\infty,\ln a)$ □□□□□□

□□□□□□ $a\le 0$ □□ $f(x)$ □ R □□□□□□

□ $a>0$ □□ $f(x)$ □ $(-\infty,\ln a)$ □□□□□□□ $(\ln a,+\infty)$ □□□□□.

□2□

□□□□□ $\forall x>0$ □□ $0<g(x)<x$ □

□□□ $\forall x>0$ □□ $g(x)>0$ □

□□1□□□□ $a=1$ □□ $f(x)_{\min}=f(0)=0$ □□□ $x>0$ □□ $e^x-1>x$ □

□ $\forall x>0$ □ $g(x)=\ln(e^x-1)-\ln x=\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)>\ln 1=0$ □

□□ $\forall x>0$ □ $g(x)<x$ □

□□ $\forall x>0$ □ $g(x)<x$ □□□□□ $\forall x>0$ □ $\frac{e^x-1}{x}<e^x$ □

□□ $\forall x>0$ □□□ $e^x-1<xe^x$ □□□ $\forall x>0$ □ $xe^x-e^x+1>0$.

□ $H(x)=xe^x-e^x+1(x>0)$ □□□ $H(x)=xe^x>0$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□□□□ $H(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□ $H(x)>H(0)=0$ □

□ $\forall x>0$ □ $xe^x-e^x+1>0$ □□□□□ $\forall x>0$ □□ $0<g(x)<x$ □

①□ $a\le 1$ □□□1□□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□□□□□ $f[g(x)]<f(x)$ □ $x\in(0,+\infty)$ □□□□□□□□□□

②□ $a>1$ □□□1□□□ $f(x)$ □ $(0,\ln a)$ □□□□□□□ $(\ln a,+\infty)$ □□□□□□

□□□ $0<x<\ln a$ □□ $0<g(x)<x<\ln a\Leftrightarrow f[g(x)]>f(x)$ □□□□□.

□□□□□□□ a □□□□□□ $(-\infty,1]$.

25□□2021·□□□□□·□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=x-a\ln x-1(a\in R)$ □

□1□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□ $g(x)=x\ln x+1$ □□ $f[g(x)]\geq f(x)$ □ $x\in(0,+\infty)$ □□□□□□□ a □□□□□

□□□□

□1□□□□□

□2□ $(-\infty,0]$.

□□□□

□1□□□□□ $f'(x)=\frac{x-a}{x}$ □□ $a\leq 0$ □ $a>0$ □□□□□□□□□□□□.

□2□□ $h(x)=g(x)-x=x\ln x-x+1$ □□□□□□□□□□□□□□ $h(x)_{\min}=0$ □□□ $x\ln x+1\geq x$ □□□□□□□□1□□□□ $f(x)$ □

□□□□□□□□□.

□1□

□□□□□□□□ $f(x)=x-a\ln x-1$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □□□ $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$ □

□ $a\leq 0$ □□□ $f'(x)>0$ □□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□ $a>0$ □□ $f'(x)=0$ □□□ $x=a$ □

□ $x\in(0,a)$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □ $(0,a)$ □□□□□

□ $x\in(a,+\infty)$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □ $(a,+\infty)$ □□□□.

□2□

□□□□□□□□ $g(x)=x\ln x+1$ □□ $f[g(x)]\geq f(x)$ □ $x\in(0,+\infty)$ □□□□□

□□ $g(x)=x\ln x+1$ □□□ $g'(x)=\ln x+1$ □

□ $x\in(0,\frac{1}{e})$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□□□

□ $x\in(\frac{1}{e},+\infty)$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□□□

□□□ $x=\frac{1}{e}$ □□□□ $g(x)_{\min}=g(\frac{1}{e})=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}>0$ □

□□ $h(x)=g(x)-x=x\ln x-x+1$ □□ $x\in(0,+\infty)$ □□□ $h'(x)=\ln x+1-1=\ln x$ □

□ $x\in(0,1)$ □□ $h'(x)<0$ □ $h(x)$ □□□□□

□ $x\in(1,+\infty)$ □□ $h'(x)>0$ □ $h(x)$ □□□□□

□□□ $x=1$ □□□ $h(x)$ □□□□□□□□□□ $h(x)_{\min}=0$ □

□□ $h(x)\geq 0$ □□ $x\ln x+1\geq x$ □□□ $(0,+\infty)$ □□□□□

□□1□□□□ $a\leq 0$ □□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□ $f[g(x)]\geq f(x)$ □ $x\in(0,+\infty)$ □□□□□□□□□□

□ $a>0$ □□ $f(x)$ □ $(0,a)$ □□□□□□□ $(a,+\infty)$ □□□□□□□□ $f[g(x)]\geq f(x)$ □ $x\in(0,+\infty)$ □□□□□□

□□□□□□□ a □□□□□□ $(-\infty,0]$.

26□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}$ □

□1□□□□□ $x\geq 0$ □□ $f(x)\geq 1$ □

□2□□ $g(x)=f(x)-1-\frac{x^2}{2}+a(1-\cos x)$ □□□□□□□ x □□□ $xg(x)\geq 0$ □□ a □□□

□□□□

□1□□□□□□

□2□ $a=1$

□□□□

□1□□□□□ $f'(x)=e^x-1-x$ □ $f''(x)=e^x-1$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)\geq f(0)=1$ □□.

□2□□□ $g(x)=e^x-1-x-x^2+a(1-\cos x)$ □□□□□□ $g'(x)=e^x-1-2x+a\sin x$ □ $g''(x)=e^x-2+a\cos x$ □□□□□□

$a=1$ □ $a>1$ □ $0<a<1$ □ $a\leq 0$ □□□□□ $x\leq 0$ □ $x>0$ □□□□□□□□ $g(x)$ □□□□□□□ $xg(x)\geq 0$ □□□□□ $a=1$.

□1□

□□□ $f'(x)=e^{x}-1-x$□ $f''(x)=e^{x}-1$□

□□ $x\geq 0$□$\therefore e^{x}-1\geq 0$□ $f''(x)\geq 0$□□□ $f'(x)$ □□□ $[0,+\infty)$ □□□□□□

□□□ $f'(0)=0$□$\therefore$ $f'(x)\geq 0$□□□ $[0,+\infty)$ □□□□□

$f(x)$ □□□ $[0,+\infty)$ □□□□□□□□ $f(0)=1$□

$\therefore$ $f(x)\geq f(0)=1$□□□

□2□

□2□ $g(x)=e^{x}-1-x-x^{2}+a(1-\cos x)$□

$g'(x)=e^{x}-1-2x+a\sin x$□ $g'(0)=0$□

$g''(x)=e^{x}-2+a\cos x$□ $g''(0)=a-1$□

□i□□ $a=1$□□ $g'''(x)=e^{x}-\sin x$□

□ $x\geq 0$□ $g'''(x)\geq 0$□ $g''(x)$ □□□ $[0,+\infty)$ □□□□□□

□□□ $g''(0)=0$□$\therefore$ $g''(x)\geq 0$□□□ $g'(x)$ □□□ $[0,+\infty)$ □□□□□□

□□ $g'(0)=0$□$\therefore$ $g'(x)\geq 0$□

$\therefore$ $g(x)$ □□□ $[0,+\infty)$ □□□□□□□□ $g(0)=0$□$\therefore$ $g(x)\geq 0$□□□□□□□□□

□ $x\leq 0$□□ $g''(x)=e^{x}-2+a\cos x\leq 0$□$\therefore$ $g'(x)$ □□□ $(-\infty,0]$ □□□□□□

□□ $g'(0)=0$□$\therefore$ $g'(x)\geq 0$□□□ $g(x)$ □□□ $(-\infty,0]$ □□□□□□

□□ $g(0)=0$□$\therefore$ $g(x)\leq 0$□□□□□□□□□

□ii□□ $a>1$ □□□ $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ □□ $\sin x<0$ □ $g'''(x)=e^x-\sin x>0$ □

$\therefore g''(x)$ □□□ $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ □□□□□

□□ $g''(0)=a-1>0$ □ $g''\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}-2<0$ □

$\therefore \exists x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ □□ $g''(x_0)=0$ □

□ $x\in\left(-\frac{\pi}{2},x_0\right)$ □□ $g''(x)<0$ □

□ $x\in(x_0,0)$ □□ $g''(x)>0$ □

$\therefore g'(x)$ □ $\left(-\frac{\pi}{2},x_0\right)$ □□□□□□□ $(x_0,0)$ □□□□□

□□□ $g'(0)=0$ □$\therefore$ $g'(x_0)<0$ □

□ $x\in(x_0,0)$ □ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □ $(x_0,0)$ □□□□□

□□ $g(0)=0$ □$\therefore$□ $x\in(x_0,0)$ □ $g(x)>0$ □□□ $xg(x)\ge 0$ □□□

□iii□□ $0<a<1$ □□ $g''(x)=e^x-2+a\cos x\le e^x-2+a$ □

□ $e^x-2+a<0$ □□ $x<\ln(2-a)$ □

$\therefore$□ $x\in(0,\ln(2-a))$ □□ $g''(x)<0$ □

$\therefore g'(x)$ □ $(0,\ln(2-a))$ □□□□□□□□ $g'(0)=0$ □

$\therefore g'(x)<0$ □ $(0,\ln(2-a))$ □□□□□

$\therefore g(x)$ 在 $(0,\ln(2-a))$ 上单调递减，因为 $g(0)=0$，

$\therefore g(x)<0$，这与 $xg(x)\geq 0$ 矛盾.

(iv) 当 $a\leq 0$时，若 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则，$g''(x)=e^x-a\sin x>0$，

$\therefore g'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，因为 $g'(0)=a-1=0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}-2>0$，

$\therefore \exists x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使 $g'(x_1)=0$. 当 $x\in(0,x_1)$ 时，$g'(x)<0$，

当 $x\in\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，因为 $g(0)=0$，

$\therefore g(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，因为 $g(0)=0$，

$\therefore g(x)<0$，这与 $xg(x)\geq 0$ 矛盾.

综上，$a=1$.

27．(2021·吉林·高三月考（文））已知函数 $f(x)=x^2+x\ln a(a\in(0,1))$，$x\in(0,1)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)>ae^x\ln x$ 对 $\forall x\in(0,1)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】

(1) 答案见解析

(2) $\left[\frac{1}{e},1\right)$

【分析】

(1) 应用分类讨论的方法，结合导数研究 $f(x)$ 的单调性即可.

(2) 将题设问题转化为 $\frac{\ln(ae^x)}{ae^x}>\frac{\ln x}{x}$ 对任意 $x\in(0,1)$ 恒成立，构造 $H(x)=\frac{\ln x}{x}(0<x<e)$，应用导数研究单调性，进一步将问题化为 $a>\frac{x}{e^x}$

□□□ $x\in(0,1)$ □□□□□□□ $G(x)=\frac{x}{e^x}$ □□□□□□□□□□□□□□□□ a □□□□□□

□1□

□ $f(x)=x^2+x\ln a$ □ $x\in(0,1)$ □□ $f'(x)=\ln a+2x$ □ $x\in(0,1)$ □

□ $0<a\le e^{-2}$ □□ $\ln a\le -2$ □□ $x\in(0,1)$ □ $f'(x)<0$ □□□ $f(x)$ □□□□□

□ $e^{-2}<a<1$ □□ $-2<\ln a<0$ □ $0<-\frac{\ln a}{2}<1$ □

□ $0<x<-\frac{\ln a}{2}$ □□ $f'(x)<0$ □□□ $f(x)$ □□□□□

□ $-\frac{\ln a}{2}<x<1$ □□ $f'(x)>0$ □□□ $f(x)$ □□□□□

□□□□ $0<a\le e^{-2}$ □□□□ $f(x)$ □ $x\in(0,1)$ □□□□□□

□ $e^{-2}<a<1$ □□□□ $f(x)$ □ $x\in\left(0,-\frac{\ln a}{2}\right)$ □□□□□□□ $x\in\left(-\frac{\ln a}{2},1\right)$ □□□□□□

□2□

□ $ae^x\ln x<x^2+x\ln a$ □□ $\frac{\ln x}{x}<\frac{x+\ln a}{ae^x}=\frac{\ln(ae^x)}{ae^x}$ □□ $\frac{\ln(ae^x)}{ae^x}>\frac{\ln x}{x}$ □□□ $x\in(0,1)$ □□□□

□ $H(x)=\frac{\ln x}{x}(0<x<e)$ □□ $H'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ □

□ $x\in(0,e)$ □□ $H'(x)>0$ □□□ $H(x)$ □ $(0,e)$ □□□□□□ $x\in(0,1)$ □ $a\in(0,1)$ □

$\therefore ae^x\in(0,e)$ □

□ $H(ae^x)>H(x)$ □□ $ae^x>x$ □□□ $x\in(0,1)$ □□□□□ $a>\frac{x}{e^x}$ □□□ $x\in(0,1)$ □□□□

□ $G(x)=\frac{x}{e^x}$ □ $x\in(0,1)$ □□ $G'(x)=\frac{1-x}{e^x}>0$ □

$\therefore G(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□□ $G(x)<G(1)=\frac{1}{e}$ □□ a □□□□□□ $\left[\frac{1}{e},1\right)$ □

28□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□$f(x)=e^x+x\ln x-k(x+1)^2-x+1$□

□1□□□□$e^x\geq ex$

□2□□□□□$x>0$□□$f(x)\geq 0$□□k□□□□□

□□□□

□1□□□□□□

□2□$\frac{e}{4}$

□□□□

□1□□$g(x)=e^x-ex$□□□□□□□□□□□□□

□2□□$f(1)\geq 0\Rightarrow k\leq\frac{e}{4}$□□□$e^x+x\ln x-\frac{e}{4}(x+1)^2-x+1\geq 0$□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

□1□

□□□□$g(x)=e^x-ex$□□$g'(x)=e^x-e$□

□$g'(x)>0$□□$x>1$□□$g'(x)<0$□□$x<1$□

□□$g(x)$□$(-\infty,1)$□□□□□□$(1,+\infty)$□□□□□

□$g(x)_{\min}=g(1)=0\Rightarrow g(x)\geq 0\Rightarrow e^x\geq ex$□

□2□

□$f(1)\geq 0\Rightarrow k\leq\frac{e}{4}$□□□$k$□□□□□$\frac{e}{4}$□

□□$e^x+x\ln x-\frac{e}{4}(x+1)^2-x+1\geq 0$□□□□□□□□□□□

□$h(x)=e^x+x\ln x-\frac{e}{4}(x+1)^2-x+1$□

□$h'(x)=e^x+\ln x+1-\frac{e}{2}(x+1)-1=e^x+\ln x-\frac{e}{2}(x+1)\Rightarrow h''(x)=e^x+\frac{1}{x}-\frac{e}{2}$□

□$x\in[1,+\infty)$□□$h''(x)=e^x+\frac{1}{x}-\frac{e}{2}\geq e+\frac{1}{x}-\frac{e}{2}>0$□

□ $x\in(0,1)$ □□ $e^x > e^0 = 1$ □ $\frac{1}{x}>1$ □□□ $h''(x)=e^x+\frac{1}{x}-\frac{e}{2}>0$ □

□□ $h''(x)>0$ □ $(0,+\infty)$ □□□□ $\Rightarrow h'(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ $h'(1)=0$ □□□ $h(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□

□□ $h(x)_{\min}=h(1)=0\Leftrightarrow h(x)\ge h(1)=0$ □□□ k □□□□□ $\frac{e}{4}$ □

29．（2021·□□·□□□□□□□□□□□ $f(x)=x(\ln x+x-a)$ □ $a\in\mathbf{R}$ □□ $f(x)>-2$ □□□□□ a □□□□□□

□□□□ $(-\infty,3)$

□□□□

□□□□□□□□□□ $\ln x+x+\frac{2}{x}>a$ □□□□□ $g(x)=\ln x+x+\frac{2}{x}$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□

□□ $x>0$ □□□

$\ln x+x-a>-\frac{2}{x}$ □□□□□ $\ln x+x+\frac{2}{x}>a$ □□□□

□ $g(x)=\ln x+x+\frac{2}{x}$ □□ $g'(x)=\frac{1}{x}+1-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2+x-2}{x^2}$ □

□ $x\in(0,1)$ □□ $g'(x)<0$ □

□ $x\in(1,+\infty)$ □□ $g'(x)>0$ □

$g(x)_{\min}=g(1)=3$ □□□ a □□□□□□ $(-\infty,3)$ □